数学コラム(17)

プレゼント交換

西山豊

誕生日会やクリスマス・パーティではプレゼント交換をするのが習わしである．参加者は各自１個ずつプレゼントを用意する．プレゼントをいったん集めて，人数分だけくじを用意して，プレゼントを引くのである．ところがどういうわけか自分が持ってきたプレゼントを引いてしまうことがある．これではプレゼント交換になっていない．もちろん自分が持ってきたプレゼントだなんて誰にも言えないし言わない．心の中では，なんて不運な私なのだろう，ついていないと思ったことはないだろうか.

これと同じ現象に席替えがある．今はどうか知らないが，私の小中高時代は学期初めには席替えがよく行われた．席替えを通してクラスのコミュニケーションの向上をはかるという試みであり，生徒たちにはひとつの楽しみであった.

ところが,ランダムに席替えくじを作っていても，誰かが「元の席である」と訴える生徒が必ずいる．そういう生徒は皆に注目され，恥ずかしい思いをする．先生は機転を利かせて,「誰々さんに代わってもらいなさい」と言って生徒間の調整を行う．こんな光景を見たことはないだろうか.

プレゼント交換や席替えにおける，このような現象は高確率で起こることがわかっている．モンモルの定理（P.R. Montmort，1708年）として証明されており，確率の値も計算されている．生徒の数をn人とすると確率は次式で表される.

$$\mathrm{P} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots \pm \frac{1}{n!}$$

式の由来は，W.フェラー，河田龍夫訳『確率論とその応用Ⅰ・上』紀伊國屋書店，1960,127-132ページを参照のこと．また，nを無限大に近づけると，

$$1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \quad (\approx 0.63212)$$

の値に近づくことが知られている．eは自然対数で$\mathrm{e} \approx 2.71828$である.

驚くべきは人数nにかかわらず，この確率は約３分の２であることである．100人でプレゼント交換しようが,1000人で席替えしようが自分の持ってきたプレゼントを引いてしまったり，元の席であったりすることが高確率で起こるということだ.

ここでは，数え上げの方法で，簡単な計算をしてみよう．子供の数が２人で，プレゼントが２個あったとしよう．子供に子供１，子供２，プレゼントにプレゼント１，プレゼント２というように番号をつけて，起こりうる組合せを表計算ソフトで整理してみる.２人の場合は,組合せは全部で2!=2通りあり，そのうちの１通りが子供１:プレゼント１,子供２：プレゼント２となり，自分のプレゼントを引くことになり，確率は1÷2で0.5ということになる.

子供の数が３人で，プレゼントが３個の場合は，子供とプレゼントの組合せは3!=6通りあり，そのうち自分のプレゼントを引くケースが４通りあり，確率は4÷6で0.67になる．子供の数が４人で，プレゼントが４個の場合は,組合せは4!=24通りあり，そのうち自分のプレゼントを引くケースが15通りあり，確率は15÷24で0.625になる.

子供が２人，３人，４人の場合，確率は0.5, 0.67, 0.625となり，0.6近辺にあることがわかる．子供の数を５人，６人として数え上げで求めてもよいのだが，数え上げの方法はますます煩雑になり，４人が限界である．そこで，前述のモンモルの公式が参考になる．公式の導入には，ベン図を用いた集合算があり，少し難しいかもしれないが，じっくり取り組めばこの式も理解不可能ではない．興味がある読者はチャレンジしてみること.

（にしやまゆたか／大阪経済大学）

「数学コラム」『理系への数学』2013年２月号, Vol.46, No.2, 34